



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой радиофизики,
профессор

_____ В.П. Якубов

" 03 " _____ 11 _____ 2000

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ**

Методические указания



Томск – 2000

Указания РАССМОТРЕНЫ И УТВЕРЖДЕНЫ методической
комиссией радиофизического факультета



Протокол № 34 от "03" ноября 2000 г.

Председатель методической комиссии радиофизического
факультета,

доцент

Г.М. Дейкова

В методических указаниях содержится описание лабораторной работы по потоковому курсу «Волновые процессы» для студентов 3-го курса радиофизического факультета. Даны краткие теоретические сведения и подробное изложение методики выполнения экспериментальной части работы.

Работа может быть использована студентами, аспирантами и специалистами и других специальностей, занимающихся изучением волновых процессов.

Работу подготовил:

доцент Завьялов А.С.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Теоретическое и экспериментальное изучение колебаний в цилиндрическом резонаторе.

1. ВВЕДЕНИЕ

На низких частотах применяются колебательные контуры в виде параллельного соединения сосредоточенных индуктивности и емкости. Колебательный процесс в контуре возникает в результате непрерывного обмена энергией между электрическим полем, сосредоточенным в конденсаторе, и магнитным полем, сосредоточенным в индуктивности.

В диапазоне СВЧ создание контуров из сосредоточенных элементов с малыми потерями практически невозможно, поскольку они становятся низкодобротными из-за больших омических потерь или потерь на излучение.

Поэтому в диапазоне СВЧ применяются объемные резонаторы, представляющие собой обычно замкнутые полости с хорошо проводящими стенками, внутри которых могут существовать свободные электромагнитные колебания.

Цилиндрический резонатор представляет собой отрезок волновода кругового сечения, замкнутый с обоих концов проводящими пластинами.

Согласно уравнениям Максвелла переменное электрическое поле является источником переменного магнитного поля, а переменное магнитное поле, в свою очередь, возбуждает переменное электрическое поле и т.д., т.е. обмен энергиями между электрическим и магнитным полями происходит непрерывно в любой области пространства. Из закона сохранения электромагнитной энергии вытекает, что в изолированном от внешнего пространства объеме, заполненном средой без потерь, запасенная электромагнитная энергия W_3 остается постоянной $\frac{dW_3}{dt} = 0$. Это

значит, что в изолированном объеме обмен энергиями должен протекать сколь угодно долго, т.е. может существовать незатухающий колебательный процесс.

В реальных резонаторах имеются одно-два отверстия для осуществления связи с линиями передачи. В резонаторе имеют место потери энергии в его стенках. Поэтому в реальных резонаторах свободные незатухающие колебания не существуют.

При описании работы резонаторов используются такие параметры, как резонансная частота f_0 и добротность Q . Величина f_0 определяется геометрическими размерами резонатора и структурой электромагнитного поля. В отличие от обычного контура резонатор СВЧ имеет бесконечное количество “резонансных” частот. Структура полей в объемном резонаторе определяется так же, как и в направляющих системах, путем решения уравнений Максвелла при определенных граничных условиях на поверхности, ограничивающей резонаторный объем.

2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Для исследования собственных или свободных колебаний цилиндрического резонатора в виде отрезка волновода кругового сечения, закороченного на концах идеально проводящими плоскими поверхностями (см. рис. 1), необходимо найти решение однородной системы уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат r, φ, z . Если считать, что проводимость стенок бесконечно велика, граничные условия задачи можно будет записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \quad \text{при} \quad r = a, \\ E_\varphi &= 0 \quad \text{при} \quad r = a, z = 0; h, \\ E_r &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0; h. \end{aligned} \tag{1}$$

В объемных резонаторах с идеально проводящими стенками, как и в волноводах, могут существовать отдельно поля (колебания) электрического и магнитного типов, характеризующиеся тем, что в первом случае поля

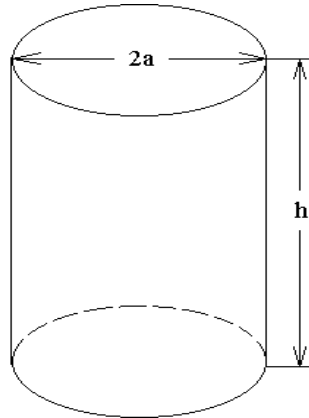


Рис. 1. Цилиндрический резонатор

содержат продольную составляющую электрического вектора, но не содержат продольной магнитной составляющей, во втором случае отсутствует продольная составляющая электрического поля, но имеется продольная составляющая магнитного поля. Решение системы уравнений Максвелла, соответствующее колебаниям электрического типа, имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{v_{ni}}{a} \frac{q\pi}{h} J_n' \left(\frac{v_{ni}}{a} r \right) \cdot \cos n\varphi \cdot \sin \frac{q\pi}{h} z, \\
 E_\varphi &= \frac{n}{r} \frac{q\pi}{h} J_n \left(\frac{v_{ni}}{a} r \right) \cdot \sin n\varphi \cdot \sin \frac{q\pi}{h} z, \\
 E_z &= \left(\frac{v_{ni}}{a} \right)^2 J_n \left(\frac{v_{ni}}{a} r \right) \cdot \cos n\varphi \cdot \cos \frac{q\pi}{h} z, \\
 H_r &= i \frac{k_0}{W_0} \frac{n}{r} J_n \left(\frac{v_{ni}}{a} r \right) \cdot \sin n\varphi \cdot \cos \frac{q\pi}{h} z, \\
 H_\varphi &= -i \frac{k_0}{W_0} J_n' \left(\frac{v_{ni}}{a} r \right) \cdot \cos n\varphi \cdot \cos \frac{q\pi}{h} z, \\
 H_z &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где k_0, W_0 - волновое число и волновое сопротивление свободного пространства, $J_n \left(\frac{v_{ni}}{a} r \right)$ - функция Бесселя порядка n , v_{ni} - i -й по счету корень функции Бесселя. Ряд значений корней функций Бесселя приводится в таблице 1.

Таблица 1.

Значения V_{ni}

		Значения V_{ni}		
		0	1	2
i \ n	1	2.405	3.832	5.135
	2	3.520	7.016	8.417

Колебание характеризуется тремя индексами (целыми числами) n, i, q и называется колебанием типа E_{niq} .

Резонансная длина волны резонатора с колебаниями типа E_{niq} определяется выражением

$$\lambda_p^{(E)} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{v_{ni}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{q}{h}\right)^2}}. \quad (3)$$

Индексы n и q для колебаний электрического типа, как следует из формул (2), могут принимать нулевые значения, т.е. $n = 0, 1, 2, \dots$ $q = 0, 1, 2, \dots$.

Простейшими видами электрических колебаний будут колебания E_{010}, E_{011} . Решение системы уравнений Максвелла, соответствующее колебаниям магнитного типа H_{niq} , имеет вид

$$\begin{aligned} E_r &= -ik_0 W_0 \frac{n}{r} J_n\left(\frac{\mu_{ni}}{a} r\right) \cdot \sin n\varphi \cdot \sin \frac{q\pi}{h} z, \\ E_\varphi &= -ik_0 W_0 \frac{\mu_{ni}}{a} J_n'\left(\frac{\mu_{ni}}{a} r\right) \cdot \cos n\varphi \cdot \sin \frac{q\pi}{h} z, \\ E_z &= 0, \\ H_r &= \frac{\mu_{ni}}{a} \frac{q\pi}{h} J_n'\left(\frac{\mu_{ni}}{a} r\right) \cdot \cos n\varphi \cdot \cos \frac{q\pi}{h} z, \\ H_\varphi &= -\frac{n}{r} J_n\left(\frac{\mu_{ni}}{a} r\right) \cdot \sin n\varphi \cdot \cos \frac{q\pi}{h} z, \\ H_z &= \left(\frac{\mu_{ni}}{a}\right)^2 J_n\left(\frac{\mu_{ni}}{a} r\right) \cdot \cos n\varphi \cdot \sin \frac{q\pi}{h} z, \end{aligned} \quad (4)$$

где μ_{ni} - i -й по счету корень производной функции Бесселя порядка n . Ряд значений корней приводится в таблице 2.

Таблица 2.
Значения μ_{ni}

$i \backslash n$	0	1	2
1	3.832	1.840	3.054
2	7.016	5.335	6.705

Резонансная длина волны резонатора с колебанием типа H_{niq} определяется выражением

$$\lambda_p^{(H)} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{ni}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{q}{h}\right)^2}}. \quad (5)$$

Для колебаний H индекс n может принимать любое целое значение, включая нулевое, т.е. $n = 0, 1, 2, \dots$, а наименьшее значение q равно единице, т.е. $q = 1, 2, 3, \dots$.

Отметим некоторые особенности спектра собственных колебаний цилиндрического резонатора.

Для колебаний типа E_{ni0} резонансная длина волны не зависит от длины резонатора и совпадает с критической длиной волны соответствующего типа волны в волноводе (E_{ni}). При определенных отношениях высоты резонатора к его диаметру одной резонансной длине волны будут соответствовать два разных колебания. Такие колебания называются вырожденными. Вырожденными являются колебания H_{011} и E_{111} при любых отношениях $\frac{h}{a}$. Колебание в резонаторе с наименьшей частотой (λ_p максимально) называют колебанием основного типа.

Для “коротких” резонаторов $\left(\frac{h}{2a} < 1\right)$ основным колебанием будет колебание электрического типа E_{010} . Для “длинных” резонаторов $\left(\frac{h}{2a} > 1\right)$ основным колебанием будет колебание магнитного типа H_{111} . Для резонатора, длина которого не слишком превышает диаметр ($2a < h < 3a$),

колебания с увеличением частоты идут в такой последовательности: H_{111} , E_{010} , E_{011} . Конфигурация полей этих колебаний схематически показана на рис. 2.

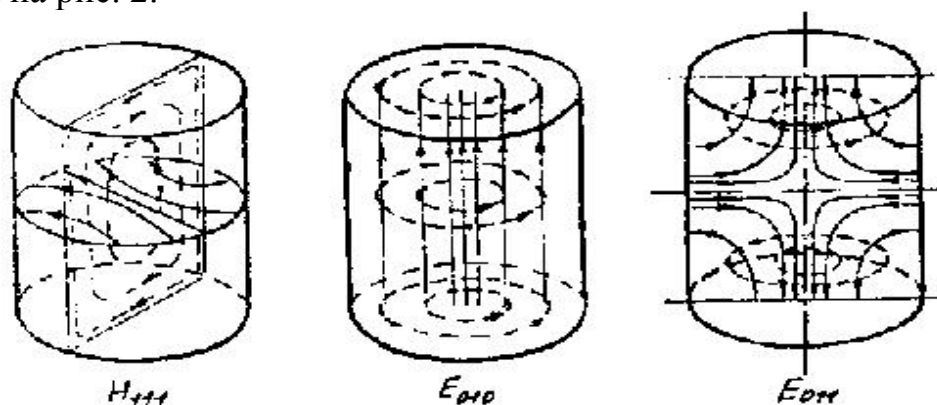


Рис. 2. Конфигурация полей

Наряду с резонансной частотой f_0 (резонансной длиной волны $\lambda_p = \frac{c_0}{f_0}$) резонаторы характеризуют параметром Q , называемым добротностью, который определяет способность резонатора сохранять запасенную энергию в режиме свободных колебаний

$$W_3(t) = W_3(0)e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}, \quad (6)$$

где W_3 - запасенная энергия, t - время, $\omega_0 = 2\pi f_0$ и определяет полосу пропускания в режиме вынужденных колебаний

$$Q = \frac{f_0}{2\Delta f}, \quad (7)$$

где $2\Delta f$ - "ширина" резонансной кривой на уровне половинной мощности.

Оценка добротности резонатора может быть проведена энергетическим методом, согласно которому

$$Q = \frac{\omega_0 W_3}{P_{\text{нсп}}}, \quad (8)$$

где $P_{\text{нсп}}$ - средняя мощность потерь за период.

Учет потерь только в стенках резонатора приводит к значениям добротности порядка нескольких десятков тысяч.

Практически достижимые величины добротностей как правило значительно ниже. (Невозможно учесть потери в контактах, определенные потери имеют место в элементах связи). Измерение добротности осуществляется обычно с использованием формулы (7).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ВНУТРИ РЕЗОНАТОРА

Характер распределения электрического и магнитного полей в резонаторе можно исследовать с помощью малого возмущающего тела. При внесении в полость резонатора тела, согласно теории малых возмущений, резонансная частота резонатора изменяется на величину δf , определяемую из соотношения

$$\frac{\delta f}{f_0} = \frac{\Delta W_E + \Delta W_H}{2W_3}, \quad (9)$$

где ΔW_E и ΔW_H - изменение максимальной энергии электрического и магнитного полей при внесении в резонатор тела. Обычно используются тела правильной формы в виде металлических или диэлектрических шариков, эллипсоидов вращения, стержней.

Величины ΔW_E и ΔW_H в этих случаях удобно выразить через дипольные моменты тел \vec{p}_E и \vec{p}_H :

$$\Delta W_E = -\frac{1}{2}\vec{p}_E \cdot \vec{E}, \quad \Delta W_H = -\frac{1}{2}\vec{p}_H \cdot \vec{H}. \quad (10)$$

В свою очередь, дипольные моменты зависят от величины возбуждающего поля

$$\vec{p}_E = \alpha_e \vec{E}, \quad \vec{p}_H = \alpha_m \vec{H}, \quad (11)$$

где α_e и α_m - электрическая и магнитная поляризуемости тела в направлении приложенного поля.

В дальнейшем предполагается провести исследование распределения продольной составляющей электрического поля E_z на оси резонатора.

Для колебаний H_{111} , E_{010} , E_{011} магнитное поле на оси равно нулю и тогда

$$\frac{\delta f}{f_0} = -\alpha_e \frac{\bar{E}_z^2(z)}{4W}, \quad (12)$$

где \bar{E}_z - усредненное значение напряженности поля по объему возмущающего тела, в качестве которого используется в работе короткий металлический стержень.

Введем в рассмотрение некоторую безразмерную величину $\mathcal{E}(z)$, равную отношению \bar{E}_z к максимальному значению $E_{z\max}$, т.е.

$$\mathcal{E}(z) = \frac{\bar{E}_z(z)}{E_{z\max}}. \quad (13)$$

Из формулы (12) следует, что

$$\mathcal{E}(z) = \kappa \sqrt{\frac{|\delta f|}{f_0}}, \quad (14)$$

где κ - некоторый безразмерный параметр, зависящий от типа колебаний в резонаторе, объема резонатора, размеров и свойств возмущающего тела.

4. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Схема экспериментальной установки с использованием условных графических обозначений приведена на рис. 3. Цилиндрический резонатор в разрезе с системой зондов показан на рис. 4а. Сигнал от генератора качающейся частоты (ГКЧ) подается через вентиль на петлю связи резонатора. Со второй петли связи сигнал поступает на детекторную секцию. Продетектированный сигнал поступает на индикатор. Внутренняя полость цилиндрического резонатора 1 характеризуется диаметром $D = 2a = 80$ мм и высотой $h = 100$ мм. Строго по оси резонатора перемещается малое возмущающее тело 2 в виде металлического стержня. Для беспрепятственного прохождения стержня через резонатор в его торцевых стенках имеются отверстия. Стержень (полый цилиндр)

поддерживается нитью, натянутой на два блока. Следующая пара блоков имеет двойные желобки. По одному из желобков направляется нить, поддерживающая стержень, а по второму – нить, несущая стержень – указатель 3. Стержень-указатель перемещается параллельно стержню, возмущающему поле в резонаторе. Положение стержня отмечается по шкале 4. Если поле в резонаторе имеет продольную электрическую составляющую E_z , то при погружении в резонатор стержня наблюдается уход резонансной частоты. Далее, если величина E_z будет меняться вдоль оси, уход частоты будет зависеть от положения стержня в резонаторе. Отмечая положения центра стержня в резонаторе и измеряя каждый раз уход частоты δf , можно построить распределение $E_z \approx \mathcal{E}(z)$ составляющей вдоль оси резонатора. Некоторые искажения в характере распределения поля будут связаны с тем, что измеряется значение $\mathcal{E}(z)$ не в точке, а ее усредненное значение по длине стержня. Систематическая погрешность будет резко возрастать при измерении поля вблизи торцов резонатора. Например, при прохождении центра стержня через плоскость, совпадающую с внутренней торцевой поверхностью резонатора (см. рис. 4б), эффективная поляризуемость стержня будет уменьшаться за счет конечности размеров отверстия. (Диаметр отверстия больше диаметра стержня и стержень не контактирует со стенкой.) Меньшим, чем должен быть, наблюдается уход частоты, а следовательно, и величина $\mathcal{E}(z)$. Эти особенности можно проследить на примере поля с равномерным распределением (колебание E_{010}). Для колебания E_{010} значения напряженности поля практически по всей длине равны $\bar{\mathcal{E}}$ за исключением крайних точек $z = 0, h$ (на шкале эти точки соответствуют 4 см и 14 см, где $\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_{0,h}$). Определив $\bar{\mathcal{E}}$, \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_h можно найти поправочные множители

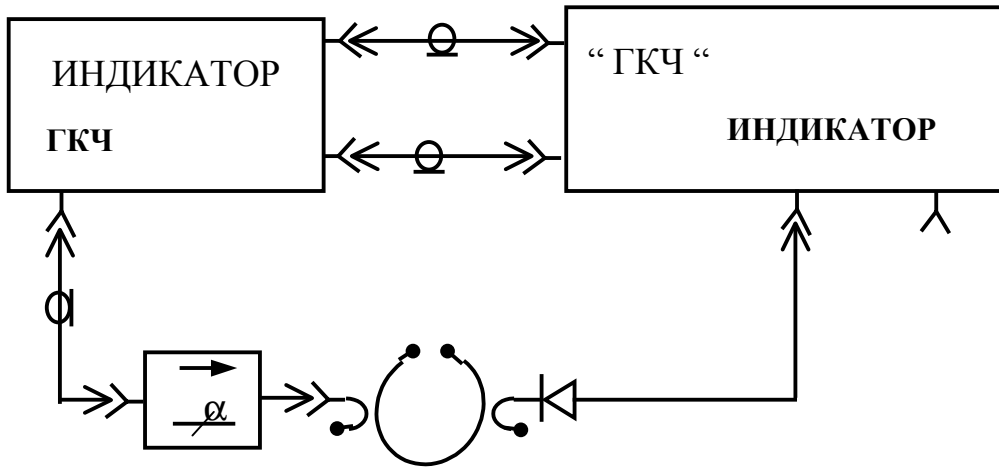


Рис. 3. Схема установки с ГКЧ

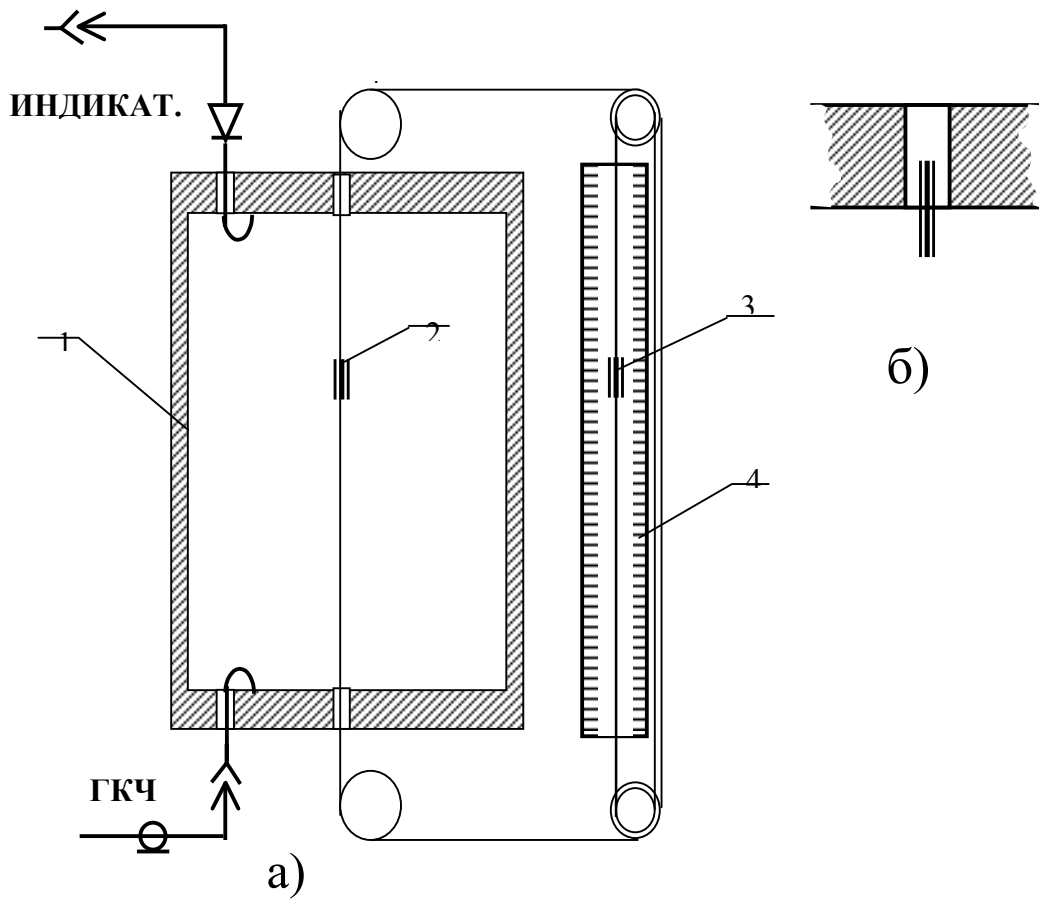


Рис. 4. Резонатор с системой зондов

$$k_0 = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0}, \quad k_h = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_h}. \quad (15)$$

Эти множители могут быть использованы при построении исправленной картины распределения поля для других типов колебаний, например, колебания E_{011} .

Такой прием получил название «внесение поправки».

Небольшие уходы частоты будут наблюдаться и в поперечном электрическом поле при колебании H_{111} за счет конечности толщины стержня.

4. ЗАДАНИЕ ПО РАБОТЕ

1. Используя формулы (2) и (4), записать выражения для напряженностей полей колебаний E_{010} , E_{011} , H_{111} .
2. Зная внутренние размеры цилиндрического резонатора $D = 2a = 80$ мм и $h = 100$ мм, по формулам (3) и (5) рассчитать резонансные длины волн колебаний E_{010} , E_{011} , H_{111} и соответствующие им резонансные частоты.
3. Включить измеритель КСВН панорамный, прогреть его и, изменяя частоту, найти низший тип колебаний, измерить резонансную частоту с помощью метки, определить добротность. Для этого отметить с помощью визирной линии индикатора (ручка «отсчет») уровень сигнала в максимуме, опустить визирную линию вниз на 3 дБ по верхней шкале индикатора и измерить частоты в точках пересечения визирной линии и резонансной кривой f_1 и f_2 . Тогда $Q = \frac{f_p}{f_1 - f_2}$. Поскольку точность измерения частоты с помощью измерителя КСВН невелика (± 1 МГц), оценить максимальное и минимальное значения Q .

4. Вводя возмущающий стержень внутрь резонатора, снять зависимость ухода частоты δf от положения центра стержня-указателя. При этом положения возмущающего стержня и стержня-указателя должны быть предварительно выравнены относительно торца резонатора. Положение возмущающего стержня в центре резонатора будет соответствовать положению центра стержня-указателя на уровне 9 см по шкале справа от резонатора.
5. Измерения по п. 3 и п. 4 повторить для последующих резонансов.
6. Построить распределение E_z -составляющей, определяя ее, например, как

$$\mathcal{E}(z) = \sqrt{\frac{|\delta f|}{f_0}},$$

т.е. не нормируя ее к максимальному значению.

7. Из распределения поля для колебания E_{010} найти поправочные коэффициенты для $z = 0, h$ (положения центра стержня указателя на делениях шкалы 14 и 4) по формулам (15).
8. Умножить на поправочные коэффициенты значения $\mathcal{E}(z)$ при $z = 0, h$ для колебания E_{011} . Внести изменения в график распределения с учетом поправок. Сравнить полученное распределение с теоретическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика.-М.: Связь, 1971. С. 369-377, 381-383.
2. Завьялов А.С. Основы измерений на сверхвысоких частотах. Томск: Изд-во ТГУ, 1981. С. 33-45.
3. Завьялов А.С., Бабина М.Н., Дунаевский Г.Е. Измерение параметров СВЧ трактов. Томск: Изд-во ТГУ, 1983. С. 102-105, 116-119.